REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 heures** **COEFFICIENT : 4**

Exercice 1 :

a) $x^3 \equiv x[\bmod 2]$

Réponse : Vrai

Justification : Soit x un entier relatif alors x soit pair soit impair.

- Si x est pair alors $x \equiv 0[\bmod 2]$ et $x^3 \equiv 0[\bmod 2]$ alors $x^3 \equiv x[\bmod 2]$.
- Si x est impair alors $x \equiv 1[\bmod 2]$ et $x^3 \equiv 1[\bmod 2]$ alors $x^3 \equiv x[\bmod 2]$.

b) Si $x \equiv 2[\bmod 14]$ alors $x \equiv 1[\bmod 7]$

Réponse : Faux

Justification : Un contre exemple, si x = 16 alors $x \equiv 2[\bmod 14]$ et $x \equiv 2[\bmod 7]$

c) Si $4x \equiv 10y[\bmod 5]$ alors $x \equiv 0[\bmod 5]$

Réponse : Vrai

Justification : Si $4x \equiv 10y[\bmod 5]$

alors $4x \equiv 0[\bmod 5]$ car $10y \equiv 0[\bmod 5]$

or 4 et 5 sont premier entre eux donc x divise 5 alors $x \equiv 0[\bmod 5]$

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4[\bmod 5] \\ y \equiv 5[\bmod 8] \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$

Réponse : Faux

Justification : **Contre exemple :** Si $\begin{cases} x = 14 \\ y = 13 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x \equiv 4[\bmod 5] \\ y \equiv 5[\bmod 8] \end{cases}$ et $8x - 5y = 47 \neq 7$;

Exercice 2 :

I) 1) T_0 la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.Donc $T_0 : y = g'(0)(x-0)+g(0)$

On $g(x)=e^{-x}$ donc $g'(x)=-e^{-x}$, alors $g(0)=1$ et $g'(0)=-1$ donc $T_0 : y=-x+1$

2) a) - On a $x \geq 0$ donc $-x \leq 0$ alors $e^{-x} \leq 1 \text{ pour tout } x \geq 0$ (i)

- On pose pour tout $x \geq 0$, $h(x)=e^{-x}+x-1$

On a $h'(x)=-e^{-x}+1$ donc $h'(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0$, alors h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$h(x) \geq h(0) \text{ pour tout } x \geq 0$,alors $h(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0$ donc $e^{-x}+x-1 \geq 0$ alors

$e^{-x} \geq 1-x \text{ pour tout } x \geq 0$ (ii).

D'après (i) et (ii) $1-x \leq e^{-x} \leq 1 \text{ pour tout } x \geq 0$

b) On a $1-x \leq e^{-x} \leq 1 \text{ pour tout } x \geq 0$ donc $1-t \leq e^{-t} \leq 1 \text{ pour tout } t \geq 0$

alors pour tout $x \geq 0$ $\int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x dt$ alors $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[-e^{-t}\right]_0^x \leq x$

donc $x-\frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1 \leq x$ finalement $x-\frac{x^2}{2} \leq 1-e^{-x} \leq x \text{ pour tout } x \geq 0$

II) f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

b) Continuité de f à droite en 0 :

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ car $\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ donc $\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

Alors f est continue à droite en 0.

Dérivabilité de f à droite en 0 :

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X}$ (On pose $X=\frac{1}{x}$) donc

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$ alors f est dérivable a droite en 0 et $f_d'(0)=0$

c) f est dérivable pour tout x >0 et on a $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$, alors $f'(x)>0$ pour tout x >0

Tableau de variation de f :

x	0	+∞
f'(x)	0 +	
f(x)	0 ↗	1

2) a) On a $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout x >0 donc f' est dérivable pour tout x >0 et $f''(x)=\frac{e^{-1/x}(1-2x)}{x^4}$

Tableau de signe de f''(x) pour tout x >0 :

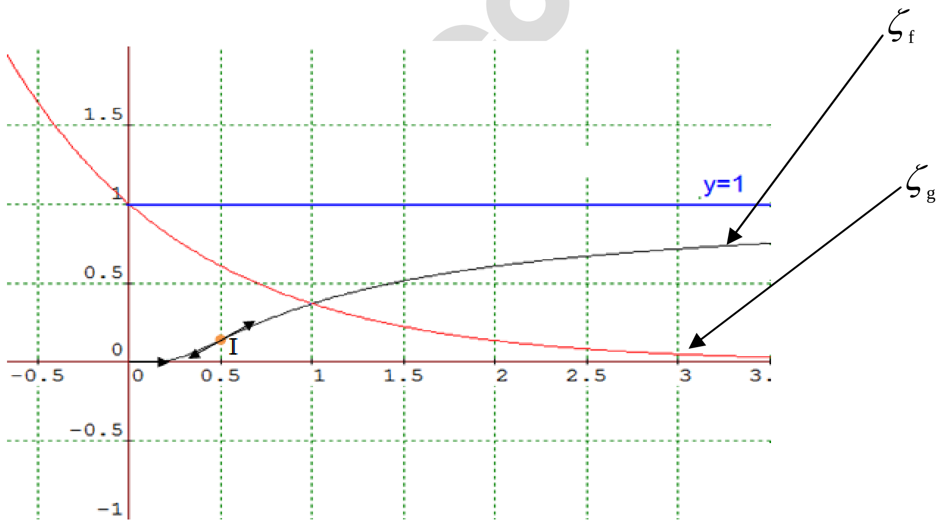
x	0		1/2		+∞
f''(x)		+	0	−	

f'' s'annule et change de signe en 1/2 donc le point $I\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (ζ).

b) T_I la tangente à (ζ) au point d'abscisse 1/2, alors $T_I : y=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})$

Donc $T_I : y=\frac{4x-1}{e^2}$

3)



4) $A_k = \int_k^{k+1}(1-f(x))dx = \int_k^{k+1}(1-e^{-\frac{1}{x}})dx$.

a) D'après I-2-b) on a pour tout $t \geq 0$, $t-\frac{t^2}{2} \leq 1-e^{-t} \leq t$, On pose $t=\frac{1}{x}$ pour tout x > 0

donc pour tout x > 0 , on a $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2} \leq 1-e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{x}$

alors $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)dx \leq \int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$, k est un entier naturel non nul.

Donc $\left[\ln x+\frac{1}{2x}\right]_k^{k+1} \leq A_k \leq [\ln x]_k^{k+1}$

alors $\ln(k+1)+\frac{1}{2(k+1)}-\ln k-\frac{1}{2k} \leq A_k \leq \ln(k+1)-\ln k$

donc $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) On a $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ et puisque :

$$\lim_{k\to+\infty}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=\ln 1=0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln 1=0$$

donc $\lim_{k\to+\infty} A_k = 0$

5) a) On a pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$

Donc $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n = \int_1^2(1-f(x)dx + \int_2^3(1-f(x)dx + ... + \int_n^{n+1}(1-f(x)dx$

Alors $S_n = \int_1^{n+1}(1-f(x)dx$ donc S_n est l'aire du domaine du plan limité par la courbe (ζ), la droite

D'équation y = 1 et les droites d'équations x = 1 et x = n + 1 avec $n \geq 1$.

b) On a : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]\leq A_k\leq\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{pour } k=1 & : \ln\left(\frac{2}{1}\right) & -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right] & \leq A_1 \leq \ln(2) \\
\text{pour } k=2 & : \ln\left(\frac{3}{2}\right) & -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] & \leq A_2 \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
\text{pour } k=3 & : \ln\left(\frac{4}{3}\right) & -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] & \leq A_3 \leq \ln\left(\frac{4}{3}\right) \\
. & . & & . \\
. & . & & . \\
. & . & & . \\
. & . & & . \\
\text{pour } k=n-1 & : \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) & -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right] & \leq A_{n-1} \leq \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \\
\text{pour } k=n & : \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) & -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] & \leq A_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{array}\right\}\text{Somme de n terme}$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\ldots\ldots.\times\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\times\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\ldots..+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right]\leq S_n$$

$$\leq\ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\ldots\ldots.\times\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\times\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)$$

Alors $\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]\leq S_n\leq\ln(n+1)$ pour tout $n\geq1$.

c) - On a : $\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]\leq S_n\leq\ln(n+1)$ pour tout $n\geq1$.

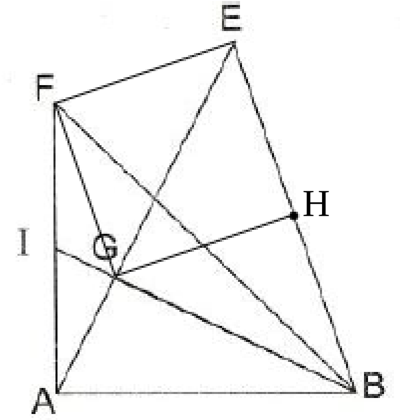
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

- On a : $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-\frac{1}{2\ln(n)}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]\leq\frac{S_n}{\ln(n)}\leq\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ pour tout $n\geq1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}=1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-\dfrac{1}{2\ln(n)}\left[1-\dfrac{1}{n+1}\right]=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{\ln(n)}=1$

Exercice 3 :



1) – On a ABF est un triangle rectangle et isocèle en A , d'après le

Le théorème de Pythagore on a $FB^2=AF^2+AB^2$

donc $FB^2=2AB^2$ $(\text{car } AB=AF)\Rightarrow FB=\sqrt{2}AB$

$\Rightarrow BA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BF$.

De plus on a $\left(\widehat{\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ alors $\begin{cases}BA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BF\\ \left(\widehat{\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$ donc f(F) = A

– On a EGB est un triangle rectangle et isocèle en G , on montre de la même façon que

$\begin{cases}BG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BE\\ \left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BG}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$ donc f(E) = G

2) **a)** On a $g(A)=F$ et $g(F)=B$, soit k le rapport de g et θ son angle , alors on a :

$$k=\frac{FB}{FA}=\frac{FB}{BA}=\frac{\sqrt{2}\cancel{BA}}{\cancel{BA}}=\sqrt{2}\ \text{et}\ \theta\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{FB}}\right)[2\pi]\Rightarrow\theta\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}}\right)\pm\pi[2\pi]$$

Alors $\theta\equiv\dfrac{\pi}{4}-\pi[2\pi]\Rightarrow\theta\equiv-\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ donc $k=\sqrt{2}$ et $\theta\equiv-\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

b) gog est la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports égale à 2 et la somme

des angles vaut $\dfrac{\pi}{2}$ (car la mesure principale de $-\dfrac{6\pi}{4}$ est $\dfrac{\pi}{2}$).

Alors g est la similitude directe de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

c) - Le triangle ABI est rectangle en A donc $\tan\left(\widehat{ABI}\right)=\frac{AI}{AB}$

et puisque $AB=AF$ et $AI=\frac{1}{2}AF$ donc $AB=2AI$ alors $\frac{AI}{AB}=\frac{1}{2}$ donc $\tan\left(\widehat{ABI}\right)=\frac{1}{2}$

- Le triangle AGB est rectangle en G donc $\tan\left(\widehat{ABG}\right)=\tan\left(\widehat{ABI}\right)=\frac{GA}{GB}=\frac{1}{2}$

Donc $GB=2GA$.

d) Soit Ω le centre de gog .

On a $gog(A)=g(F)=B$ donc $\begin{cases}\Omega B=2\Omega A\\ \left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ **(1)**

Or le triangle AGB est rectangle en G et de plus $GB=2GA$ donc $\begin{cases}GB=2GA\\ \left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ **(2)**

D'après **(1)** et **(2)** ona $\Omega=G$ donc G est le centre de gog alors G est le centre de g

3) a) – r est la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports égale à 1 et la somme des angles vaut $-\frac{\pi}{2}$, donc r est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

– On a $r(F)=gof(F)=g(A)=F$ donc $r(F)=F$ alors F est le centre de r

Conclusion : r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b) - $r(E)=gof(E)=g(G)=G$ donc $r(E)=G$.

- On a $r(E)=G\Leftrightarrow\begin{cases}FE=FG\\ \left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ **(i)**, d'autre part on a H = E*B et le triangle BGE est rectangle et isocèle en G donc $\begin{cases}HG=HE\\ \left(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HE}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ **(ii).**

D'après **(i) et (ii)** EFGH est un carré

Exercice 4 :

1) a) MNP est rectangle en P **si et seulement si** $\left(\widehat{\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc

MNP est rectangle en P **si et seulement si** $\arg\left(\frac{z_M - z_P}{z_N - z_P}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc

MNP est rectangle en P **si et seulement si** $\frac{z_M - z_P}{z_N - z_P}$ est imaginaire pur.

Or $\frac{z_M - z_P}{z_N - z_P} = \frac{z - z^3}{z^2 - z^3} = \frac{z(1-z^2)}{z^2(1-z)} = \frac{z(1-z)(1+z)}{z^2(1-z)} = \frac{1+z}{z}$ car $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1,1\}$

Conclusion : (MNP est rectangle en P) **si et seulement si** ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$, x et y sont deux réels .

$$\frac{1+z}{z} = \frac{1+x+iy}{x+iy} = \frac{(1+x+iy)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

c) (MNP est rectangle en P) **si et seulement si** ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur) donc

(MNP est rectangle en P) **si et seulement si** ($\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$ est imaginaire pur)

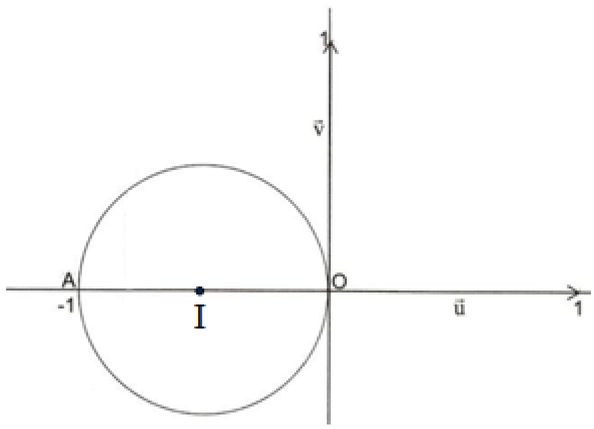
Donc $x^2 + y^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ .Donc l'ensemble des points M(z) tels que

MNP est rectangle en P est le cercle de centre $I(-\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A

(car $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1,1\}$ donc $M \neq O$ et $M \neq A(-1)$, le point d'affixe 1 n'appartient pas à ce cercle)

Conclusion :

L'ensemble des points M(z) tels que MNP est rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA] privé de O et A.



2) a)* $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_N}{z_M}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z^2}{z}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \arg(z)[2\pi]$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

* $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_P}{z_N}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \arg(z)[2\pi]$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

b) - On a $OM^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$ or $M(x,y) \in \Gamma$ donc $x^2 + y^2 + x = 0$ alors $x^2 + y^2 = -x$

donc $OM^2 = -x$ **(1)** .

- De plus H est le projeté orthogonale de M sur l'axe $(O,\vec{u})$ donc $OH = |x| = -x$ **(2)** (car x < 0).

D'après **(1)** et **(2)** on a $OH = OM^2$.

c) **Construction du point N :**

- On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$, On pose B(1) donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ donc

$N \in [OB')$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ alors $B' = S_{(OM)}(B)$.

- On a $ON = |z^2| = |z|^2 = OM^2$ alors $ON = OH$ donc $N \in \zeta_{(O,OH)}$.

- **Conclusion :** $N = [OB') \cap \zeta_{(O,OH)}$.

Construction du point P :

- On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right)[2\pi]$, donc

$P \in [OM')$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)[2\pi]$ alors $M' = S_{(ON)}(M)$.

- Le triangle MNP est rectangle en P alors P appartient au cercle (C) de diamètre [MN].

- **Conclusion :** $P = [OM') \cap (C)$.

Figure :