Chapitre :	FONCTIONS EXPONENTIELLS
Niveau ciblé :	4 ème Maths/Sc-Ex/Sc-Inf/Sc-Tech

Exercice n°1 (Correction)

Partie A

1. a. Remarquons de suite que $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\frac{e^{x}}{e^{x}}=\frac{1}{e^{x}+1}$ donc la limite en $+\infty$ est $\frac{1}{+\infty}=0$ et la limite en $-\infty$ est $\frac{1}{0+1}=1$.

b. Les asymptotes sont $y = 0$ en $+\infty$ et $y = 1$ en $-\infty$.

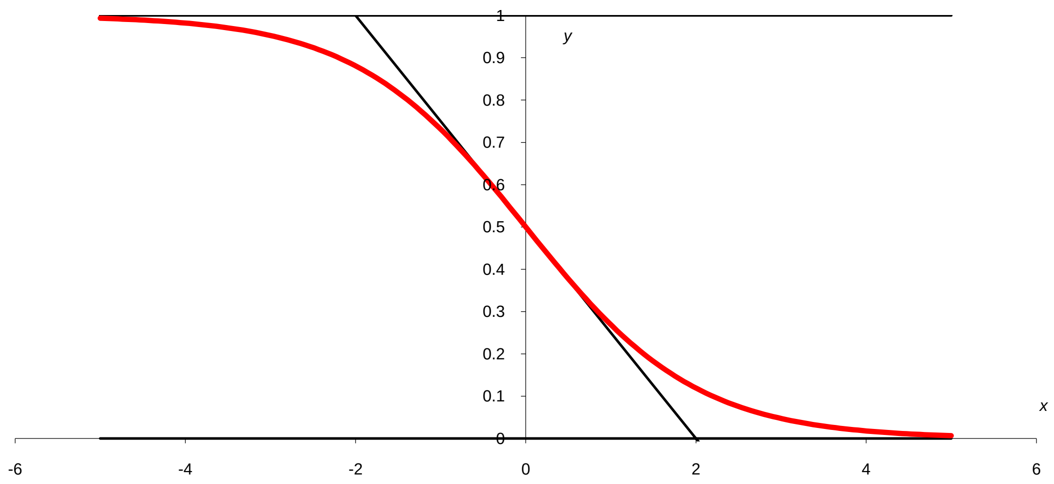
2. $f'(x)=-\frac{(e^{x}+1)'}{(e^{x}+1)^2}=-\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$ qui est évidemment strictement négative. $f(0)=\frac{1}{2}$.

3. $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

4. a. $f(x)+f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}+1+e^{x}+1}{(1+e^{-x})(1+e^{x})}=\frac{2+e^{-x}+e^{x}}{1+e^{-x}+e^{x}+1}=1$.

b. Le point de coordonnées $\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C.

c.



Partie B

1. a. $u(x)=1+e^{-x}$. $u'(x)=-e^{-x}$.

b. On remarque que $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-u'}{u}$ donc les primitives de f sont de la forme

$$F(x)=-\ln|u|+K=-\ln\left(1+e^{-x}\right)+K.$$

En 0, on a $F(0)-\ln 2=-\ln(1+1)+K \Rightarrow K=0$.

2. a. & b. $A=\int_0^1 f(x)dx=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1=-\ln\left(1+e^{-1}\right)+\ln\left(1+e^0\right)=\ln\frac{2}{1+e^{-1}}=\ln\frac{2e}{e+1}$.

3. $v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx=-\ln\left(1+e^{-1-\frac{1}{n}}\right)+\ln\left(1+e^{-\frac{1}{n}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\ln\left(1+e^{-1-0}\right)+\ln\left(1+e^0\right)=\ln\frac{2}{1+e^{-1}}=A$.

On pouvait s'attendre au résultat car $\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n°2(Correction)

1. $e^{2x}-e^x+1=X^2-X+1$ en posant $X=e^x$. On a alors $\Delta=-3<0$ donc le trinômes est positif ainsi que $e^{2x}-e^x+1$.

$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}=\frac{e^x(2e^x-1)}{e^{2x}-e^x+1}$ donc *f'* est du signe de $2e^x-1$. Ce terme est positif lorsque $e^x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>-\ln 2$. Par ailleurs $f(-\ln 2)=\ln\left(e^{-2\ln 2}-e^{-\ln 2}+1\right)=\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)=\ln\frac{3}{4}$.

2. En $-\infty$ c'est facile car e^{2x} et e^x tendent vers 0. On a donc *f* qui tend vers ln1=0.

En $+\infty$ $e^{2x}-e^x+1$ se comporte comme e^{2x} et tend donc vers $+\infty$.

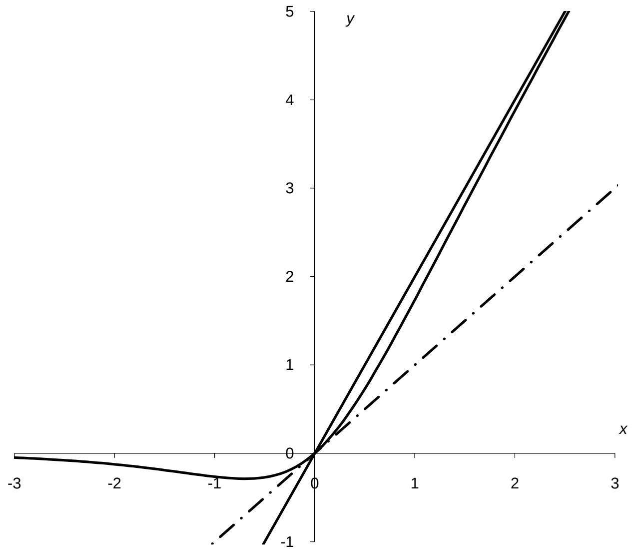
3. $f(x)-2x=\ln(e^{2x}-e^x+1)-\ln(e^{2x})=\ln\left(\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^{2x}}\right)=\ln[(e^{2x}-e^x+1)e^{-2x}]=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

Les termes e^{-2x} et e^{-x} tendent vers 0 à l'infini, donc $f(x)-2x$ tend vers ln1=0. La droite $y=2x$ est donc asymptote de (C).

4. La tangente en 0 est $(y=x)$. Figure à la fin.

5. L'équation $e^{2x}-e^x+1=\frac{7}{8}$ est équivalente à $f(x)=\ln(7/8)$. Comme $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}<1$, on a $\ln\frac{3}{4}<\ln\frac{7}{8}<0$, il y a donc deux solutions.

Par le calcul on pose $X=e^x$, ce qui donne l'équation $X^2-X+1-\frac{7}{8}=0\Leftrightarrow X^2-X+\frac{1}{8}=0$, $\Delta=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ d'où les racines $X_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow x_1=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et $X_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}>0\Rightarrow x_1=\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.



x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\ln(3/4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ecole Numerique