Lycée secondaire Remada

Année scolaire /2010-2011

Prof:Tarroum Ben Ahmed M^{ed}

DEVOIR DE synthèse N°1

Classe : $4^{ème}$ **Maths**

Epreuve : Mathématiques *Durée :3H*

Exercice N1 :QCM (3 points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes aucune justification n'est demandée.

1)le nombre complexe $\sqrt{3}+i$ est une racine troisième de 8i

2)Un argument de nombre complexe $z=-5\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $\frac{\pi}{6}$

3) $\sqrt[2010]{2009^3} < \sqrt[2011]{2009^4}$

4)soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par f(x)= $x\,\sqrt[3]{4-x^2}$ et (ξ) est la courbe de f dans un repère orthonorm

la courbe (ξ) admet une seule tangente horizontale.

5) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{2}}{x-1} = .\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$

6)Les suites $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $V_n = U_n+\frac{1}{n}$ définies pour tout $n \geq 1$ sont adjacentes.

Exercice N2 :(4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{U},\overrightarrow{V})$ .On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

(E) :$z^3-2(1+i)z^2+3iz+1-i=0$

1) a)Montre que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera.

b)Résoudre alors l'équation (E).

2) On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives 1 , 1+ i et i

Montrer que le quadrilatère OABC est un carré

3) Soit l'application f :P $\longrightarrow$ P

$$M(z) \longmapsto M'(z') \text{ tel que } Z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z+1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

b)Soit O' , B' et C' les images respectives de O , B et C par f. Quelle est la nature du quadrilatère O'AB'C'

4) Soit le point M_0 d'affixe 2 ,on pose pour tout entier naturel n ,$M_{n+1}=f(M_n)$.On désigne par z_n l'affixe de

et par Z_nl'affixe de vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

a)Montrer que $Z_1= e^{i\frac{\pi}{4}}$

b)Montrer que pour tout n de IN, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

c)En déduire l'ensemble des valeurs de n pour les quelles les points A, M_o et M_n sont alignés.

Exercice N3 :(4 points)

Dans le plan orienté dans le sens directe , on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$

Soit Jet K les milieux respectives des segments $[AD]\ et[CD]$ et soit E le point tel que DBE soit équilatéral d

1 /faire une figure

2/a) Montrer qu'il existe un seul déplacement R qui envoie B sur A et A sur D

b)Vérifier que R est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

3/ *On désigne par* r_1 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et par r_2 la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On pose g = $r_1\ o\ r_2$

Déterminer g(D) puis caractériser g

4/ Soit f la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ .On pose t = g o f^{-1} (ou f^{-1} *est l'application réciproque* d

a)*Déterminer t(A)puis caractériser t*

b)*Soit M un point n'appartient pas à (AD).On pose* $M_1 = f(M)$ *et* $M_2 = g(M)$.

Montrer que le quadrilatère ABM_2M_1 *est un parallélogramme.*

c)*En déduire qu'il existe un unique* antidéplacement qui transforme A en M_1 et D en M_2

5/Soit $h=t_{\overrightarrow{BC}}\ o\ S_{(AC)}$

a)Déterminer h(A) , h(D) et hoh(A).

b)Montrer que h est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite .

Exercice N4:(4 points)

Dans l'annexe ci-joint (figure 1) page 4/4 on représenté dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (ξ) de la fonction f définie sur]0 , 1] par f(x) = 2- $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

- (ξ)Admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1
- La droite x = 0 est une asymptote à (ξ)

I. En utilisant le graphique

1/ Montrer que f réalise une bijection de]0,1] sur]-∞ , 2] on note f^{-1} la fonction réciproque de f et (ξ') est la courbe représentative de f^{-1} dans $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

2 /a)*Déterminer* $(f^{-1})_g{}'(2)$ et $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$.

b) Tracer le courbe (ξ') et la demi tangente à (ξ') au point d'abssice 2 et sa asymptote.

c) Dresser le tableau de variation de f^{1}

II 1/ Montrer que : $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{1+(x-2)^2}}$ pour tout x appartient à $]-\infty, 2]$

2/ Soit la fonction g définie sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ par $\begin{cases} \sqrt{f^{-1}(2+\tan(x))} & si\ x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est contenu à droite en $-\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $g(x) = \sqrt{cos(x)}$

c) Etudier la dérivabilité de g à droite en $-\frac{\pi}{2}$

d) Montrer que g réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ sur $[0, 1]$

e) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ puis calculer $(g^{-1})'(x)$

f) g^{-1} est elle dérivable à gauche en 1.

Exercice N5 :(5 points)

Soit g la fonction définie sur IR par :$g(x) = -x^3 - x + 1$

1/ a)Dresser le tableau de variation de g.

b)Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α *et que* $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

c)Montrer que l'équation : $x = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ équivaut à $g(x) = 0$

2/ Soit la fonction f définie sur IR par :$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

a)dresser le tableau de variation de f

b) Déterminer $f\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right)$

3 /a)Montrer que , pour tout $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{5}{9}$

b)En déduire que , pour tout x *et* y *de* $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{5}{9}|x - y|$

4/Soit la suite réelle (Un) définie sur IN par :$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout n de IN , $\frac{2}{3} \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que si (Un) converge alors sa limite est la solution de l'équation $g(x) = 0$

5/ a) Montrer que ,pour tout n de IN, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{9}|U_n - \alpha|$

b) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq (\frac{5}{9})^n |1 - \alpha|$

c) En déduire que (Un) est converge et déterminer sa limite

Annexe à rendre avec la copie

Non et prénom :……………………

Exercice N°4

Figure 1