| | | |
|---|---|---|
| Lycée Remada<br>2010 / 2011<br>Durée : 2h | Devoir de synthèse<br>N°1 | Prof :TARROUM M[ed]<br>Mathématiques<br>$4^{ème}$ Technique |

***EXERCICE 1 :*** (5 points)

On considère le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-2;+\infty[$

| x | -2 | | 0 | | 1/2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | ‖ | - | 0 | + | 0 | - | |
| f(x) | 4 | ↘ | -1 | ↗ | 3 | ↘ | 0 |

Répondre par **VRAI** ou **FAUX** sans justification demandée :

1/ l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions dans $[-2;+\infty[$

2/ f admet deux extrémums absolus

3/ la courbe représentative de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$

4/ f est dérivable à droite en2

5/ la courbe représentative de $f$ admet une demi- tangente verticale

6/ la tangente à la courbe représentative de f au point $\left(\frac{1}{2};3\right)$ est de coefficient directeur 3

7/ le point (0 ;-1) est un point anguleux de $C_f$

8/ $f\left(\left[-2;\frac{1}{2}\right]\right)=[3;4]$

9/ $f^{-1}$ est strictement croissante sur $[-1;3]$

10/ $f^{-1}(0) = -1$

***EXERCICE 2*** : (3 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

1. Dresser le tableau de variation de $f$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

   b. Vérifier que $\alpha \in ]-2;-1[$

   c. Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,5.
3. Montrer que $\alpha = \frac{\alpha^2+1}{1-\alpha^2}$

**EXERCICE 3** : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/ Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats

2/a- montrer que $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

b-dresser le tableau de variation de f

c- Tracer C

3/ Soit la fonction $h(x) = f(x) - x$

a-Calculer h'(x) et en déduire le signe de h'

b-Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique $\alpha$ dans $]0; +\infty[$

Et que $1 < \alpha < \sqrt{2}$

4/ a- Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J que précisera

b- Tracer dans le même repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ la courbe C' de $f^{-1}$

c- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

5/ a- Montrer que pour tout $x \in ]1; +\infty[$ ; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b- En déduire que pour tout $x \in ]1; +\infty[$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

**EXERCICE 4 :** (6 points)

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

Pour tout réel $\theta$ de $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ ,on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_\theta): z^2 - 2(i + \cos\theta)z + 2i\cos\theta = 0$

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta)$

2/on désigne par A ,B et C les points d'affixes respectives : $i$ ; $Z_1 = i + e^{i\theta}$ et $Z_2 = i + e^{-i\theta}$

a- Montrer que les points B et C varient sur un même cercle que l'on précisera lorsque $\theta$ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

b- On note $I$ le milieu de $[BC]$

Déterminer l'ensemble décrit par $I$ lorsque $\theta$ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

3/ a- Montrer que pour tout réel $\alpha$ on a : $i + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

b- Mettre alors $Z_1$ et $Z_2$ sous sa forme exponentielle

4/a- Montrer que le triangle ABC est isocèle

b- Déterminer $\theta$ pour que ABC soit équilatéral