Lycée Othman Chatti M'saken	Devoir de synthèse n° 1 4 $Sc_{1\&2}$
	MATHEMATIQUES
Proposé par : Ridha Bahloul et Salim Hassine	Le 08/12/2010 DUREE : 2 h

Exercice 1 : (3 points)

Pour chaque question, une seule proposition est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = 1+ie^{i\theta}$. Le conjugué de z est :

   a) $1-ie^{i\theta}$

   b) $1+ie^{-i\theta}$

   c) $1-ie^{-i\theta}$

2) Soit $a = -4-4i$. Alors :

   a) $(1+i)$ est une racine quatrième de a .

   b) $(1+i)$ est une racine cinquième de a.

   c) $(1+i)$ est une racine cubique de a.

3) Soit (u_n) la suite définie sur N par $u_n = \dfrac{2^{2n+1}}{\pi^n}$.

   a- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

   b- (u_n) n'admet pas de limite

   c- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 2 : (6 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 2 - 2\sin\theta = 0$.

   a) Vérifier que $\cos^2\theta + 2\sin\theta - 2 = -(1-\sin\theta)^2$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

   c) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2) Soit $f(z) = z^3 - 2(\cos\theta + i)z^2 + 2(1 + 2i\cos\theta - \sin\theta)z + 4i(\sin\theta - 1)$.

   a) Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation $f(z) = 0$.

   b) Vérifier que $f(z) = (z-2i)(z^2 - 2\cos\theta\, z + 2 - 2\sin\theta)$.

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $e^{i\theta} - i$ et $e^{-i\theta} + i$.

   a) Montrer que le triangle OAB est isocèle en O.

   b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.

   c) Déterminer θ pour que OACB soit un carré.

Exercice 3 : (6 points)

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

   a) Dresser le tableau de variation de g.

   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et vérifier que $0 < \alpha < 1$.

2) Soit f la fonction définie sur $]-1,1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

   a) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

   b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-1,1[$ et vérifier que $f'(x) < 0$.

   c) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1]$ sur $\mathbb{R}_+$.

   d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

3) Soit h la fonction définie sur $]-1,1]$ par $h(x) = f(x) - x$.

   a) Etudier le sens de variation de h.

   b) Déterminer le signe de $h(x)$.

4) Soit U la suite définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.

   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 : (5 points)

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$.

Dans le graphique ci-joint on donne sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans **un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Par une lecture graphique répondre aux questions suivantes :

   a) Déterminer $f'_g(1)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

   d) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que **l'on déterminera**.

2) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite $\Delta : y = x$.

3) Tracer, dans le même repère, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction **réciproque** f^{-1} de f.

4) La fonction f étant définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$.

   Soit g la fonction définie sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f(1 - \sin x)$.

   a) Montrer que pour tout x de $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, on a $g(x) = \cos x$.

   b) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

   c) Montrer que la fonction réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $[0,1[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Prénom : …………………………………….. Nom : ……………………………………… Classe : 4 Sc …