Lycée Othman Chatti
Msaken

DEVOIR DE SYNTHESE N° 1

08 – 12 – 2010

Ali Ben Aliji

SECTION : 4 Tech 3

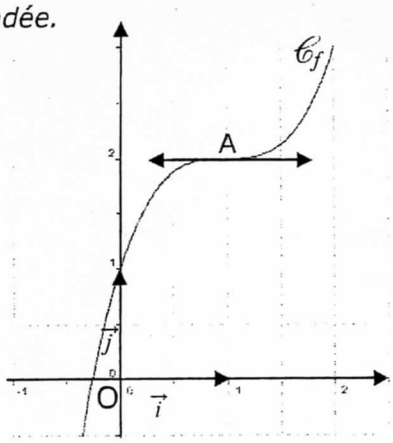
EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 2 heures ✧✧✧

Ce sujet comporte 3 pages

EXERCICE 1 : *(3 points)*

Pour chaque question, une seule proposition est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



1) Dans la figure ci contre, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f passant par A(1,2) alors :

a) f admet un extremum en 1

b) A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$

c) A est un point anguleux de $\mathscr{C}_f$

2) Soit g une fonction continue sur [0, 1], et dérivable sur]0, 1[.
Si l'on sait de plus que g(0) = –1 et g(1) = 1, alors :

a) L'équation g'(x) = 2 admet au moins une solution dans]0, 1[.

b) L'équation g'(x)=–2 admet au moins une solution dans]0, 1[.

c) L'équation g'(x) = 0 admet au moins une solution dans]0, 1[.

3) Le nombre complexe $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une racine carré de :

a) 2i **b) $2\sqrt{2}i$** **c) 4i**

4) Les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = 2i$ et $z_1z_2=1-i$ sont les solutions de l'équation :

a) $z^2-iz+1-i=0$ **b) $z^2+(1-i)z-2i=0$** **c) $z^2-2iz+1-i=0$**

EXERCICE 2 : *(6 points)*

Soit m un réel non nul

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+2z+(1+m^2)=0$

2) Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose $P(z)= z^3+2(1-i)z^2+(1+m^2-4i)z-2i(1+m^2)$.

a) Vérifier que 2i est une racine de l'équation P(z)=0.

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que $P(z)=(z-2i)(z^2+bz+c)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M' et M'' d'affixes respectives 2i ; –2–2i ; –1–im et –1+im.

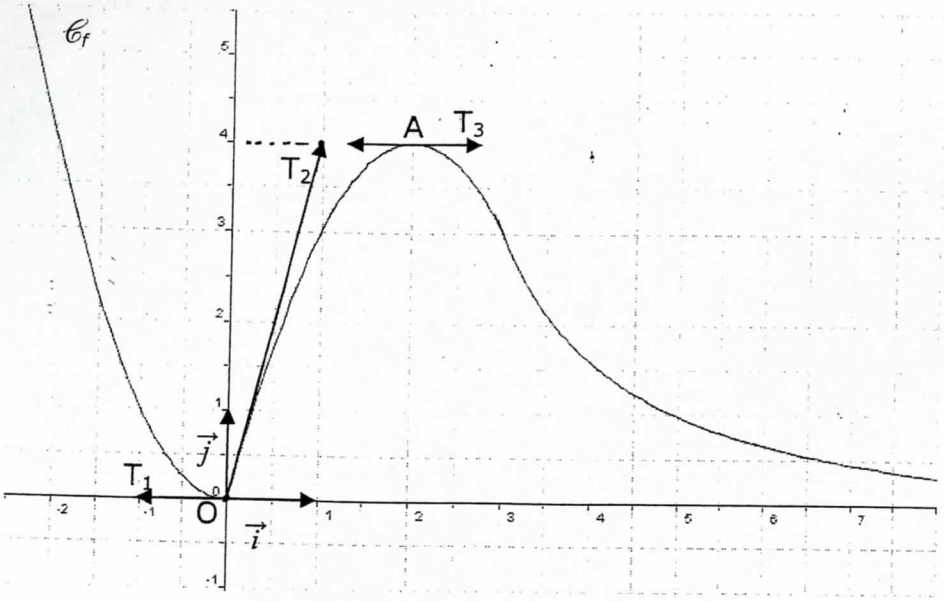
a) Montrer que AM'BM'' est un parallélogramme

c) Déterminer m pour que AM'BM'' soit un rectangle.

EXERCICE 3 :

(4 points)

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



- T1 et T2 sont deux demi-tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point O
- T3 est une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A(2 ;4)
- $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $-\infty$, une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.
- L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

1) Par lecture graphique :

   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

   b) Déterminer $f'(2)$; $f_d'(0)$ et $f_g'(0)$

2) Dresser le tableau de variation de f

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty, 0]$

   a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on déterminera

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$

   c) g^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier

EXERCICE 4 :

(7 points)

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

   a) Dresser le tableau de variation de g.

   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $0.5<\alpha<0.6$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

   a) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$

   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

   c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit h la restriction de f sur $[0, +\infty[$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative . (***Voir page 3***)

   a) Montrer que h est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-1,1]$.

   b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_h^{-1}$ de la fonction réciproque h^{-1} coupe la droite Δ d'équation $y=x$ en un point A dont on déterminera les coordonnées.

   c) Construire dans le même repère ***(page 3)*** la courbe représentative $\mathscr{C}_h^{-1}$ de h^{-1}

   d) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour $x \in]-1,1]$.

   e) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $]-1,1]$ et calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$.

om :..... Prénom :.....Classe :.....

$\mathscr{C}_h$: la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$